Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

P. Feller

10. August 2020

Analysis I & II Basisprüfung
Lösungsvorschlag

1

Legen Sie Ihre Legi offen auf den Tisch. Mobiltelefone sind auszuschalten und im Gepäck zu verstauen. Bitte lesen Sie folgende Hinweise aufmerksam durch.

- Prüfungsdauer: 240 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Zusammenfassung auf maximal 20 A4-Seiten. Wörterbücher.
- Lesen Sie zuerst alle Aufgaben durch. Verweilen Sie nicht zu lange bei einer Aufgabe, die Ihnen Schwierigkeiten bereitet.
- In Aufgabe 1 (Multiple Choice) wird nur Ihre Antwort gewertet, allfällige Erklärungen werden nicht beachtet und sind nicht punkterelevant. Aufgabe 1 ist die einzige, die Sie direkt auf der Prüfung lösen sollen.
- Beginnen Sie jede Aufgabe (ausser Aufgabe 1) auf einem neuen Blatt und lassen Sie die obere linke Ecke jedes Blattes zum Heften frei. Versehen Sie alle abzugebenden Blätter mit Ihrer Prüfungsnummer
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift und nicht in roter oder grüner Farbe und benutzen Sie keinen Tipp-Ex.
- **Sämtliche Antworten müssen begründet werden.** Wenn Sie einen Satz aus der Vorlesung oder aus den Übungen verwenden, machen Sie deutlich, auf welchen Sie sich beziehen.
- Schreiben Sie ordentlich! Nicht eindeutig Lesbares wird ignoriert.
- Vergessen Sie nicht, am Schluss **alle** Blätter (aufsteigend) nach Aufgaben geordnet abzugeben.
- Für die Bestnote müssen Sie nicht alle Aufgaben bearbeiten.

Bitte leer lassen!

Aufg.	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
Total		

Note	

Aufgabe 1.[MC-Aufgaben, 8 Punkte]

Bei jeder der vier Fragen können beliebig viele Antworten richtig sein. Entscheiden Sie bei jeder Aussage, ob Sie richtig oder falsch ist, und markieren Sie ihre Antwort mit einem deutlichen Kreuz in der richtig/falsch-Tabelle rechts der Aufgabe. Sie erhalten 1/2 Punkte, wenn sie ein Kreuz passend setzen, und -1/2 Punkte, wenn Sie ein Kreuz falsch setzen. Sie erhalten aber in der ganzen Aufgabe 1 mindestens 0 Punkte.

(a) Nehmen Sie an, folgende Aussage sei wahr:
Wenn Maxwell Licht versteht, dann freut sich Maxwell.

Dann können Sie folgern:

	richtig	falsch
i) Wenn Maxwell sich nicht freut, dann versteht er Licht nicht.	x	
ii) Wenn Maxwell Licht nicht versteht, dann freut Maxwell sich nicht.		x
iii) Maxwell versteht Licht nicht oder Maxwell freut sich.	x	
iv) Maxwell freut sich nicht oder Maxwell versteht Licht.		x

(b) Was gilt für die Differentialgleichung $3y'''' - 1000y'' = 2020y - 18y'$?

	richtig	falsch
i) Es gibt keine Lösung mit $y''(1000) = 0$.		x
ii) Der Raum der Lösungen mit $y''(1000) = 0$ ist 2-dimensional.		x
iii) Der Raum der Lösungen mit $y''(1000) = 0$ ist 3-dimensional.	x	
iv) Der Raum der Lösungen mit $y''(1000) = 0$ ist 4-dimensional.		x

(c) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit Fundamentalmatrix $Df = \begin{pmatrix} xy & 0 & z^4 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

	richtig	falsch
i) $f^{-1}(f(1,1,1))$ ist eine Kurve.		x
ii) Es existieren Umgebung U von $(1,1,1)$ und V von $f(1,1,1)$, so dass eine differenzierbar Funktion $g\colon V \to U$ existiert mit $g \circ f = id$.		x
iii) Der Punkt $(1,1,1)$ hat eine Umgebung in $\mathbb{R}^3$ in welcher sich $f^{-1}(f(1,1,1))$ als Graph über der xy-Ebene beschreiben lässt.	x	
iv) Der Punkt $(1,1,1)$ hat eine Umgebung in $\mathbb{R}^3$ in welcher sich $f^{-1}(f(1,1,1))$ als Graph über der yz-Ebene beschreiben lässt.	x	

(d) Seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ glatt und $g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei die Identität. Was ist korrekt?

	richtig	falsch
i) Sei $x \in \mathbb{R}^2$. Die Fundamentalmatrix von $g \circ f$ bei x ist die Einheitsmatrix.	x	
ii) Sei $y \in \mathbb{R}^3$. Die Fundamentalmatrix von $f \circ g$ bei y hat Rang 3.		x
iii) Sei $x \in \mathbb{R}^2$. Die Spalten der Fundamentalmatrix von f bei x spannen einen 2-dimensionalen Vektorraum auf.	x	
iv) Sei $y \in \mathbb{R}^3$. Die Spalten der Fundamentalmatrix von g bei y spannen einen 2-dimensionalen Vektorraum auf.	x	

Aufgabe 2.[8 Punkte = 2+2+2+2]

(a) Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, wobei $a_n = \dfrac{en^{10} + \pi n^8 + \sqrt{2}n^{2020}}{n^{10} + n^8 + n^{2020} + e}$.

Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$, falls dieser existiert.

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

(b) Gegeben sei die Folge $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, wobei $b_n = \sqrt{n^5 - n} - \sqrt{n^5 - 1}$.

Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} b_n$, falls dieser existiert.

Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

(c) Bestimmen Sie die Konvergenzradien von $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\pi}{e^{3n}} x^n$ und $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3\pi}{e^{3n}} x^{4n}$.

(d) Bestimmen Sie den Grenzwert $\displaystyle\lim_{t\to\pi/2} \tan(t)(1 - e^{\pi - 2t})$, falls dieser existiert.

Lösung:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{en^{-2010} + \pi n^{-2012} + \sqrt{2}}{n^{-2010} + n^{-2012} + 1 + en^{-2020}} = \sqrt{2}.$$

Die Reihe konvergiert nicht, da die a_n nicht gegen 0 konvergieren.

(b) Erweitern mit $\sqrt{n^5 - n} + \sqrt{n^5 - 1}$ ergibt für $n > 2$

$$b_n = \frac{n^5 - n - n^5 + 1}{\sqrt{n^5 - n} + \sqrt{n^5 - 1}}.$$

b_n lässt sich von oben und unten abschätzen durch beispielsweise

$$\frac{1-n}{2\sqrt{n^5}} > b_n > \frac{1-n}{2\sqrt{\frac{1}{2}n^5}}.$$

Beide Seiten gehen gegen 0, also geht auch $b_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Für die Reihe beachten wir, dass beispielsweise gilt

$$|b_n| \leq \frac{n}{\sqrt{n^5}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

für grosse n. Damit konvergiert die Reihe absolut nach dem Majorantenkriterium (oder nach Satz (2.13) im Skript/in der Vorlesung).

Alternative: Zuerst die absolute Konvergenz der Reihe zeigen, danach folgt sofort, dass die Folge eine Nullfolge sein muss.

(c) Wir wenden die Charakterisierung des Konvergenzradius mit dem Wurzelkriterium (vgl. Version des Satz (2.14) in der Vorlesung) an

$$\rho_1 = \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3\pi}{e^{3n}}}\right)^{-1} = e^3.$$

Für die zweite Reihe setzen wir $y = x^4$. Dann ist der Konvergenzradius bezüglich y wie oben, bezüglich x lösen wir $e^3 = \rho_2^4$, also

$$\rho_2 = e^{\frac{3}{4}}.$$

Alternative: Quotientenkriterium (Satz (2.14) im Skript/in Vorlesung)

(d) Wir schreiben $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ und sehen, dass wir L'Hospital anwenden können:

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \tan(t)(1-e^{\pi-2t}) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)(1-e^{\pi-2t})}{\cos(t)} = \lim \frac{\cos(t)(1-e^{\pi-2t}) - 2\sin(t)e^{\pi-2t}}{-\sin(t)} = -2.$$

Alternative: Schreibe als $\frac{(1-e^{\pi-2t})}{\frac{1}{\tan t}}$ und wende darauf L'Hospital an.

Aufgabe 3.[4 Punkte = 1+3]

(a) Ist die Funktion $y(t) = \sin(2t + \frac{\pi}{2})$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$(y')^2 + 4y^2 = 4, \quad y(\pi) = 1?$$

(b) Ist die Funktion $y(t) = e^{t^2} \int_1^t e^{-s^2} ds + \frac{1}{2}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' - 2ty = 1 - t, \quad y(1) = \frac{1}{2}?$$

Lösung: In dieser Aufgabe muss nur abgeleitet und eingesetzt werden, das Lösen der Gleichungen ist nicht verlangt.

(a) Ja, denn $y'(t) = 2\cos(2t + \frac{\pi}{2})$, dann folgt die Gleichung mit $\sin^2 + \cos^2 = 1$. Die Anfangsbedingungen sind auch erfüllt.

(b) Ja, denn es gilt

$$y'(t) = 2te^{2t} \int_1^t e^{-s^2} \, ds + e^{t^2} e^{-t^2} = 2t(y(t) - \frac{1}{2}) + 1 = 2ty + 1 - t.$$

Beim Ableiten haben wir im ersten Schritt sowohl die Produktregel als auch den Hauptsatz der Infinitesimalrechnung/ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz (4.4) im Skript/in der Vorlesung) verwendet.

Zudem sind auch die Anfangswerte erfüllt.

Aufgabe 4.[6 Punkte =1+2+3]

Betrachten Sie die Differentialgleichung $\frac{y''}{4} + y = 0$.

(a) Was ist die Dimension des Lösungsraumes dieser DGL?

(b) Finden Sie die allgemeine Lösung dieser DGL.

(c) Finden Sie die Lösung des folgenden Anfangswertproblems

$$y'' + 4y = 2\cos(2t), \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0.$$

Lösung:

(a) 2-dimensional (siehe Satz (3.17) im Skript/ in der Vorlesung)

(b) Das charakteristische Polynom ist $\frac{\lambda^2}{4} + 1 = 0$, also ist $\lambda = \pm 2i$. Die Lösung ist dann

$$y(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t).$$

Alternative: $y(t) = C_1 e^{2it} + C_2 e^{-2it}$.

(c) Die homogene Lösung ist wie in b)

Da die Inhomogenität Teil der homogenen Lösung ist, bietet sich der Ansatz $y_p(t) = At\cos(2t) + Bt\sin(2t)$ an. Dann ist

$$\begin{aligned} y_p' &= A\cos(2t) - 2At\sin(2t) + B\sin(2t) + 2B\cos(2t) \\ y_p'' &= -4A\sin(2t) - 4At\cos(2t) + 4B\cos(2t) - 4Bt\sin(2t). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung:

$$\frac{y_p''}{4} + y_p = \cos(2t)(-At + B + At) + \sin(2t)(-A - Bt + Bt) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\cos(2t).$$

Die Lösung davon ist $A = 0$, $B = \frac{1}{2}$, also $y_p = \frac{1}{2}t\sin(2t)$.

Setzen wir die Anfangswerte ein, kriegen wir noch $C_1 = C_2 = 0$ und damit

$$y(t) = \frac{1}{2}t\sin(2t).$$

Alternative: Variation der Konstanten, um die partikuläre Lösung zu finden. (Kompliziert!)

Aufgabe 5.[6 Punkte]

Bestimmen Sie die ersten 4 Nachkommastellen der Dezimaldarstellung von

$$4/3 - \cos(0.1).$$

Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist.

Lösung: Wir wenden Taylorentwicklung an auf die Funktion $f(x) = \frac{4}{3} - \cos(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} & & f(0) &= \frac{1}{3} \\ f'(x) &= \sin(x) & \Rightarrow \quad f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= \cos(x) & \Rightarrow \quad f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= -\sin(x) & \Rightarrow \quad f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(x) &= -\cos(x) & \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) &= -1 \\ & & \dots & \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass wir bei Entwicklung bis zur k-ten Stelle, k gerade, die Fehlerabschätzung der $k+1$-ten Stelle verwenden können. Wir prüfen deshalb mal den Fehler dritter Ordnung, um zu prüfen, ob dieser bereits klein genug ist:

$$R_3(f, x_0, 0.1) \leq \frac{1}{4!} \max_{\xi \in (0,0.1)} f^{(4)}(\xi)(0.1)^4 \leq \frac{(0.1)^4}{4!}.$$

Da $4! > 10$ sehen wir, dass der Einfluss dieses Fehlers sich höchstens in der fünften Stelle bemerkbar macht, dies ist also bereits ausreichend (wobei wir hier implizit verwenden, dass keine der Nachkommastellen 0 ist). Wir nehmen deshalb Taylor bis zur 3. Ordnung, resp. mit obiger Überlegung bis zur 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} f(0.1) &\sim f(0) + f'(0)(0.1) + \frac{1}{2} f''(0)(0.1)^2 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{(0.1)^2}{2} = 0.33333\ldots + 0.005 = 0.3383\ldots \end{aligned}$$

Aufgabe 6.[6 Punkte =2+2+1+1]

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx + c$,
wobei a, b und c reelle Koeffizienten sind.

(a) Zeigen Sie, dass f surjektiv ist.

(b) Für welche a, b und c ist f injektiv?

(c) Seien a, b und c so, dass f bijektiv und die Umkehrabbildung $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Bestimmen Sie $g'(f(2))$.

(d) Für welche a, b und c ist f bijektiv und die Umkehrabbildung differenzierbar?

Lösung:

(a) Unabhängig von a, b, c gilt, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Für gegebenes $y \in \mathbb{R}$ gibt es also x_1, x_2 mit $f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$. Da Polynome stetig sind, gibt es mit dem Zwischenwertsatz dann auch x mit $f(x) = y$.

(b) Für Injektivität brauchen wir $f' \geq 0$. Betrachte

$$f'(x) = x^2 + 2ax + b.$$

Um das Minimum zu bestimmen, suchen wir den Punkt, wo $f''(x) = 0$, also $2x + 2a \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = -a$. Damit ist $f'(x) \geq f'(-a) = a^2 - 2a^2 + b = b - a^2$. Damit dies ≥ 0 ist, ist die Bedingung also

$$b \geq a^2,\ c \in \mathbb{R}.$$

($f(x)$ kann als Polynom dritten Grades nie lokal konstant sein kann, wir haben also entweder gar keine kritischen Punkte oder nur Sattelpunkte.)

Alternative: Wir bestimmen direkt die kritischen Punkte und stellen sicher, dass f keine lokalen Maxima und Minima hat. Kritische Punkte sind alle x mit $x^2 + 2ax + b = 0$. Fallunterscheidung:

Fall $b - a^2 > 0$: Die Gleichung hat keine Lösung, d.h. es gibt keine kritischen Punkte, das garantiert Injektivität.

Fall $b - a^2 = 0$: Die Gleichung hat genau eine Lösung und mit Überprüfung der zweiten Ableitung sieht man, dass diese ein Sattelpunkt ist, auch dies garantiert Injektivität.

Fall $b - a^2 < 0$: In diesem Fall gibt es je ein lokales Maximum und ein lokales Minimum, Injektivität ist nicht gegeben.

(c) Es gilt $g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$ und damit mit $x = 2$ und obigen Berechnungen

$$g'(f(2)) = \frac{1}{4 + 4a + b}.$$

(d) Für alle a, b, c wie in b) haben wir Bijektivität (denn f ist bijektiv genau dann, wenn f sowohl surjektiv als auch injektiv ist). Damit die Umkehrabbildung differenzierbar ist, muss g' überall existieren, das ist äquivalent dazu, dass $f'(x)$ nie null ist. Das ist erfüllt, wenn

$$b > a^2,\ c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 7.[3 Punkte]

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Bestimmen Sie $\int_e^{e^2} \log(x^n) dx$.
(Erinnerung: Wir schreiben log für den natürlichen Logarithmus.)

Lösung: Wir nutzen partielle Integration für die Funktionen $\log(x^n)$ und 1 und kriegen:

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \log(x^n)\, dx &= x \log(x^n)\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{xnx^{n-1}}{x^n}\, dx \\ &= e^2 \log(e^{2n}) - e \log(e^n) - n(e^2 - e) = n(2e^2 - e - e^2 + e) = ne^2.\end{aligned}$$

Alternative: $\int_e^{e^2} \log(x^n)\, dx = n \int_e^{e^2} \log(x)\, dx$ und dann im Wesentlichen gleich wie oben.

Aufgabe 8.[6 Punkte =4+1+1]

(a) Finden Sie eine Lösung $f\colon (-1/100, 1/100) \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y' - y^2 \cos(x) = \cos(x), \quad y(0) = 1.$$

(b) Wie viele Funktionen $f\colon (-1/100, 1/100) \to \mathbb{R}$ gibt es, die eine Lösung des Anfangswertproblems aus a) sind?

(c) Wie viele Funktionen $f\colon (-100, 100) \to \mathbb{R}$ gibt es, die eine Lösung des Anfangswertproblems aus a) sind?

Lösung:

(a) Wir schreiben um als $\frac{dy}{dx} = (y^2+1)\cos(x)$, um Separation der Variablen zu verwenden:

$$\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \cos x \, dx$$
$$\Rightarrow \quad \arctan(y) = \sin(x) + C$$
$$\Rightarrow \quad y = \tan(\sin(x) + C).$$

Mit $y(0) = \tan(C) \overset{!}{=} 1$ ergibt sich $C = \arctan(1)$, also beispielsweise $C = \frac{\pi}{4}$, insgesamt also

$$y(t) = \tan(\sin(x) + \frac{\pi}{4}).$$

Bemerkung: Alle Konstanten der Form $C = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, sind korrekt.

(b) Genau eine mit Picard-Lindelöf (Satz (3.16) im Skript/ in der Vorlesung): In a) wurde die Existenz einer Lösung gezeigt, mit Picard-Lindelöf gibt es maximal eine Lösung.

Die verschiedenen Konstanten, die man in a) wählen kann, ergeben keine unterschiedlichen Lösungen, sondern nur verschiedene Darstellungen der selben Lösung.

(c) Gar keine, denn die Lösung aus a) lässt sich nicht auf das grössere Intervall fortsetzen.

($\tan(\sin(x) + \frac{\pi}{4})$ nur sinnvoll definiert, solange $\sin(x) + \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (oder alternativ für welche Konstante auch immer in a) gewählt wurde). Da $1 > \frac{\pi}{4}$, gibt es allerdings x, so dass $\sin(x) + \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{2}$, die Lösung würde explodieren.)

Aufgabe 9.[8 Punkte =3+1+4]

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = e^{-x^2+y^2+9}.$$

(a) Hat f lokale Maxima, lokale Minima und Sattelpunkte? Falls ja, bestimmen Sie alle Punkte (x, y), welche lokales Maximum, lokales Minimum oder Sattelpunkt sind.

(b) Hat f globale Maxima und globale Minima? Falls ja, bestimmen Sie alle Punkte (x, y), welche globale Maxima oder globale Minima sind.

(c) Sei E die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$:

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^4 = 1\}.$$

Sei $h\colon E \to \mathbb{R}, h(x, y) = f(x, y)$ die Einschränkung von f auf E.

Bestimmen Sie die globalen Maxima und die globalen Minima auf E der Funktion h.

Lösung:

(a) Wir suchen zuerst die Punkte, wo der Gradient verschwindet:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} (-2x)e^{-x^2+y^2+9} \\ (2y)e^{-x^2+y^2+9} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $e^{-x^2+y^2+9}$ immer positiv ist, ist dies erfüllt genau dann, wenn $(x, y) = (0, 0)$. Um den Typ zu bestimmen, betrachten wir die Hessematrix:

$$\begin{aligned} Hess_f(x, y) &= \begin{pmatrix} (-2x)^2 e^{-x^2+y^2+9} - 2e^{-x^2+y^2+9} & (-2x)(2y)e^{-x^2+y^2+9} \\ (-2x)(2y)e^{-x^2+y^2+9} & (2y)^2 e^{-x^2+y^2+9} + 2e^{-x^2+y^2+9} \end{pmatrix} \\ Hess_f(0, 0) &= e^9 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir sehen also einen positiven und einen negativen Eigenwert, damit ist $(0, 0)$ ein Sattelpunkt.

Alternative: Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion kann man stattdessen einfach die lokalen Maxima, Minima und Sattelpunkte der Funktion $g(x, y) = -x^2 + y^2 + 9$ bestimmen.

(b) Jedes globale Maximum/Minimum wäre insbesondere auch ein lokales Maximum/Minimum, damit kann es also keine geben.

(c) Dies lässt sich mit der Methode der Lagrangschen Multiplikatoren lösen. Beachte zuerst, dass Maxima und Minima existieren, denn die Menge E ist kompakt, da gilt $E \subseteq [-1, 1] \times [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Sei also

$$L(x, y, \lambda) = e^{-x^2+y^2+9} - \lambda(x^2 + 4y^4 - 1)$$

und betrachte das Gleichungssystem (wir verwenden die Zwischenschritte aus a))

$$\frac{\partial L}{\partial x} = (-2x)e^{-x^2+y^2+9} - 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0 \tag{1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = (2y)e^{-x^2+y^2+9} - 16\lambda y^3 \stackrel{!}{=} 0 \tag{2}$$
$$x^2 + 4y^4 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \tag{3}$$

Aus (1) ergibt sich entweder $x = 0$ oder $e^{-x^2+y^2+9} + \lambda = 0$. Aus (2) ergibt sich entweder $y = 0$ oder $e^{-x^2+y^2+9} - 8\lambda y^2 = 0$.

Wir untersuchen die vier Möglichkeiten, die sich daraus ergeben:

<u>Fall 1:</u> $x = y = 0$. Dies erfüllt (3) nicht, fällt also weg.

<u>Fall 2:</u> $y = 0$. Aus (3) folgt dann, dass $x = \pm 1$ sein muss.

<u>Fall 3:</u> $x = 0$. Aus (3) folgt dann, dass $y^4 = \frac{1}{4}$. Dies hat die Lösungen $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $y = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}$. Letztere beide sind nicht reell, fallen also weg.

<u>Fall 4:</u> Im verbleibenden Fall ist $e^{-x^2+y^2+9} + \lambda = 0$ und $e^{-x^2+y^2+9} - 8\lambda y^2 = 0$. Die erste Gleichung sagt $\lambda = -e^{-x^2+y^2+9}$. Dies setzen wir in die zweite Gleichung ein und erhalten $e^{-x^2+y^2+9} + 8y^2 e^{-x^2+y^2+9} = e^{-x^2+y^2+9}(1 + 8y^2) = 0$. Dies ist äquivalent zu $1 + 8y^2 = 0$ und diese Gleichung hat keine reellen Lösungen.

Insgesamt haben wir also die vier Kandidaten $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (-1, 0)$, $P_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $P_4 = (0, \frac{-1}{\sqrt{2}})$. Einsetzen in die Funktion ergibt Maxima bei P_3 und P_4, Minima bei P_1 und P_2.

Alternative: Mit Parametrisierung der Kurve E. Achtung: Mit einer Parametrisierung à la $y \mapsto (\pm\sqrt{1 - 4y^2}, y)$ werden künstliche Eckpunkte erzeugt, in diesem Fall bei $(\pm 1, 0)$, diese müssen zu den Kandidaten gezählt werden.

Aufgabe 10.[6 Punkte =3+3]

Betrachten Sie die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \frac{z}{x}\sqrt{9y^4 + 1}.$$

(a) Berechnen Sie das Integral von f über die Kurve, die wie folgt parametrisiert ist:

$$\phi\colon [1, 2] \to \mathbb{R}^3, \quad \phi(t) = (t^3, t, 2).$$

(b) Berechnen Sie das Integral von f über die Fläche, die wie folgt parametrisiert ist:

$$\psi\colon [1,2]\times[-2,2]\to\mathbb{R}^3,\quad \psi(s,t)=(s^3,s,t).$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\dot\varphi=(3t^2,1,0)\quad\Rightarrow\quad ||\dot\varphi||=\sqrt{9t^4+1}.$$

Das zu berechnende Integral ist dann

$$\int_1^2 f(t^3,t,2)\,||\dot\varphi||\,dt=\int_1^2\frac{2}{t^3}\sqrt{9t^4+1}\sqrt{9t^4+1}\,dt=\int_1^2(18t+\frac{2}{t^3})\,dt$$
$$=(9t^2-\frac{1}{t^2})|_1^2=28-\frac{1}{4}.$$

(b) Um den Normalenvektor zu bekommen, rechnen wir

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}=\begin{pmatrix}3s^2\\1\\0\end{pmatrix},\quad\frac{\partial\psi}{\partial t}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\quad\frac{\partial\psi}{\partial s}\times\frac{\partial\psi}{\partial s}=\begin{pmatrix}1\\-3s^2\\0\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow\quad||\frac{\partial\psi}{\partial s}\times\frac{\partial\psi}{\partial s}||=\sqrt{1+9s^4}.$$

Das zu berechnende Integral ist dann

$$\int_1^2\int_{-2}^2 f(s^3,s,t)\,||\frac{\partial\psi}{\partial s}\times\frac{\partial\psi}{\partial s}||\,dt\,ds=\int_1^2\int_{-2}^2\frac{t}{s^3}\sqrt{9s^4+1}\sqrt{9s^4+1}\,dt\,ds$$
$$=\int_1^2\{...\}\,ds\int_{-2}^2 t\,dt=0.$$

Alternative: Symmetrie ausnutzen.

Aufgabe 11.[7 Punkte =2+2+3]

Betrachten Sie die folgenden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$:

$$v(x,y)=\begin{pmatrix}\cos(\pi x)\cos(\pi y)\\-\sin(\pi x)\sin(\pi y)\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad K(x,y)=\begin{pmatrix}xy\\x^3\end{pmatrix}.$$

(a) Berechen Sie die Rotation von v und K.

(b) Berechnen Sie das Linienintegral von K entlang der orientierten Kurve, die wie folgt parametrisiert ist:

$$\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) = (t, t^2).$$

(c) Berechnen Sie das Linienintegral von v entlang der orientierten Kurve, die wie folgt parametrisiert ist:

$$\psi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \psi(t) = (\sin^4(t^3(t-1)) + t/2, e^{-t^2} - t/e).$$

Lösung:

(a) rot $v = 0$ und rot $K = 3x^2 - x$.

(b) Es ist $\dot{\varphi}(t) = (1, 2t)$ und damit ist das zu berechnende Integral

$$\int_0^1 K(t,t^2) \cdot \dot{\varphi}(t)\, dt = \int_0^1 (t^3, t^3) \cdot (1, 2t)\, dt = \int_0^1 (t^3 + 2t^4)\, dt = (\frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{5}t^5)|_0^1 = \frac{13}{20}.$$

(c) Da rot $v = 0$ wissen wir, dass ein Potential zu v existiert. Mit Rechnen oder Raten lässt sich bestimmen, dass dieses z.B. gegeben ist durch

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\cos(\pi x).$$

Das zu berechnende Integral ist dann

$$\int_\psi v \cdot ds = \Phi(\psi(1)) - \Phi(\psi(0)) = \Phi(\frac{1}{2}, 0) - \Phi(0,1) = \frac{1}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\pi}.$$

Alternative 1: Auch $\Phi + C$, $C \in \mathbb{R}$ ist ein zulässiges Potential. Weitere gibt es nicht.

Alternative 2: Mit dem Satz von Green kann man stattdessen auch entlang eines beliebigen anderen Pfades integrieren, welcher Anfangs- und Endpunkt verbindet.

Aufgabe 12.[7 Punkte =4+3]

Sei S die Sphäre um 0 mit Radius 2. Berechnen Sie den Fluss durch S von aussen nach innen folgender Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$:

(a) $K(x,y,z) = \begin{pmatrix} -e^{x^2+y^2+z^2}x \\ -e^{x^2+y^2+z^2}y \\ -e^{x^2+y^2+z^2}z \end{pmatrix}$,

(b) $K(x, y, z) = \begin{pmatrix} z \sinh(x^2 y) \\ \sinh(x^2 y) \\ -z(zxy + x^2) \cosh(x^2 y) \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) Der nach innen gerichte Einheitsvektor an einem Punkt (x, y, z) ist gegeben durch $n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$. Damit ist $K \cdot n = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)e^{x^2+y^2+z^2} = 2e^4$ mit $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Das gesuchte Integral ist dann

$$\int_S K \cdot d\omega = 2e^4 \operatorname{vol}(S) = 32\pi e^4.$$

Alternative 1: Einsetzen der Parametrisierung der Kugeloberfläche.

Alternative 2: Mit dem Divergenzsatz stattdessen über die Vollkugel integrieren.

(b) Es lässt sich überprüfen, dass $\operatorname{div}(K) = 0$. Damit ist mit dem Divergenztheorem

$$-\int_S K \cdot d\omega = \int_V \operatorname{div}(K) dvol = 0.$$