Zusammenfassung
Signal- und Systemtheorie I

Adaption vom Vorlesungsskript von Helmut Bölcskei

(Version 1.1)

Autorin: Mona-Lisa Michel

Herbstsemester 2020

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieses Skript ist im Zusammenhang mit meiner Übungsstunde vom Herbstsemester 2020 bei Prof. Helmut Bölcskei entstanden und ist weitgehend eine Zusammenfassung von seinem Skript. Es soll dem/der Leser*in als Vorbereitungshilfe für die Prüfung dienen, jedoch ist das lesen dieses Skriptes alleine sicher nicht genügend um die Prüfung zu bestehen! Ich kann keine Garantie auf Korrektheit und Vollständigkeit des Skriptes geben. Ich bin froh um jegliche Meldungen von Fehlern oder Unklarheiten direkt an mich unter:
monmiche@student.ethz.ch
Ich hoffe es hilft dem/der Leser*in beim bewältigen der Prüfung und ich wünsche viel Spass beim lesen.

Lineare Algebra

Definition. (Linearer Raum) Ein Linearer Raum über $\mathbb{C}$ ist eine nichtleeree Menge X zusammen mit einer wohldefinierten Addition und skalaren Multiplikation welche die folgende 8 Eigenschaften erfüllen:
$\forall x_1, x_2, x_3 \in X$ und $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

1. $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$
2. $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$
3. Es gibt genau ein Nullelement für welches gilt: $0 + x_1 = x_1$
4. Es gibt für jedes Element x_1 ein Inverses Element, so dass $x_1 + (-x_1) = 0$
5. $\alpha(\beta x_1) = (\alpha\beta)x_1$
6. Es gibt ein Einselement, so dass: $1x_1 = x_1$
7. $\alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$
8. $(\alpha + \beta)x_1 = \alpha x_1 + \beta x_1$

$\rightarrow$ In dieser Vorlesung werden wir uns vorallem mit linearen Funktionenräumen beschäftigen (siehe Definition S.9 im Skript)

$\rightarrow$ Vergiss nicht die Addition und skalare Multiplikation auf Wohldefiniertheit zu überprüfen!

Definition. (Linearer Unterraum) Ein Linearer Unterraum $\tilde{X}$ von X ist definiert durch:

1. $x_1 + x_2 \in \tilde{X}$ $\qquad \forall x_1, x_2 \in \tilde{X}$
2. $\alpha x \in \tilde{X}$ $\qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in \tilde{X}$

Definition. (Linear Unabhängig) Eine Menge Vektoren $e_1, \ldots, e_M$ heisst linear unabhängig, wenn $\sum_{k=1}^{M} c_k e_k = 0$ für $c_1, \ldots, c_M \in \mathbb{C}$ impliziert, dass $c_k = 0 \; \forall k = 1, \ldots, M$.

Definition. (Basis) Eine Menge $\{e_k\}_{k=1}^{M}, e_k \in \mathbb{C}^M$ nennt man eine Basis für $\mathbb{C}^M$, wenn:

1. $\text{span}\{e_k\}_{k=1}^{M} = \{c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_Me_M | c_1, c_2, \ldots, c_M \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}^M$
2. $\{e_k\}_{k=1}^{M}$ sind linear unabhängig

Wichtige Sätze zu Basen

- X hat Dimension M, wenn es eine linear unabhängige Teilmenge mit M Elementen gibt und alle Teilmengen mit M+1 Elementen linear abhängig sind. Wenn kein solches M existiert ist X unendlich Dimensional.
- Die Kardinalität aller Basen eines linearen Raumes ist gleich.
- Die Kardinalität einer Basis ist gleich der Dimension des Raumes.

Definition. (Norm) Eine Norm auf einem linearen Raum ist definiert durch

1. $||x|| \geq 0$ (Positivität)
2. $||x_1 + x_2|| \leq ||x_1|| + ||x_2||$ (Dreiecksungleichung)
3. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$ (Homogenität)
4. $||x|| = 0$ wenn $x = 0$ (Definitheit)

Cauchy-Schwarz Ungleichung

Wenn u,v Elemente eines Vektorraums gilt

$$| < u, v > | \leq ||u|| \cdot ||v||$$

wobei $||u||$ die induzierte Norm ist.

→ Gleichheit gilt nur, wenn u,v linear abhängig sind.
→ Oft nützlich um Eigenschaft 2 von Normen zu zeigen.

Definition. (Inneres Produkt) Ein inneres Produkt ist eine Abbildung gegeben durch $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \mapsto \mathbb{C}$ welche folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ (Additivität)
2. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ (Homogenität)
3. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$ (konjugierte Symmetrie)
4. $\langle x, x \rangle \geq 0$ (Definitheit)

Definition. (Induzierte Norm) Die Induzierte Norm ist definiert durch

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

→ x, y sind orthogonal, wenn $\langle x, y \rangle = 0$

Definition. (Pythagoras)

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$$

Tricks

- Die Inverse einer $2x2$ Matrix $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ lässt sich schnell berechnen durch:
$$T^{-1} = \frac{1}{det(T)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
- Eine Matrix ist orthogonal, wenn $Q^T = Q^{-1}$

Hilberträume

Definition. (Hilbertraum) Ein Hilbertraum ist ein linearer Raum, der mit einem inneren Produkt ausgestattet ist und vollständig bezüglich der induzierten Norm ist.

Definition. (Vollständiges Orthonormalsystem) Ein Vollständiges Orthonormalsystem oder eine Orthonormalbasis ist eine Familie von Vektoren, welche einen Raum komplett aufspannen und alle orthonormal zu einander sind (d.h. orthogonal und normiert). In einem Hilbertraum X müssen $\{e_l\}_{l=-\infty}^{\infty}$ folgende 2 Eigenschaften erfüllen:

1. $\langle e_l, e_{l'} \rangle = \begin{cases} 1 & l = l' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für $l, l' \in \mathbb{Z}$
2. Für jedes $x \in X$ gilt $||x||^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\langle x, e_l \rangle|^2$

$\rightarrow$ Orthonormalbasen sind normerhaltend

L^2 - Ein wichtiger Spezialfall

Der L^2 Raum oder auch Lebesque-Raum ist der Raum der 2-fach integrierbaren Funktionen und ein Spezialfall von einem Hilbertraum

$$L^2 = \left\{ x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

Die Norm von L^2 ist definiert durch

$$||x|| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

und das Skalarprodukt durch

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t)^* dt$$

$\rightarrow$ L^2 ist ein unendlich-dimensionaler linearer Raum (siehe Beweis S.20 im Skript)

$\rightarrow$ weitere Hilbert-Beispielräume findest du auf Seite 14 im Skript

Systeme und Systemeigenschaften

Definition. (System) Ein System H ist eine Abbildung, die einem Eingangssignal x ein Ausgangssignal y zuordnet. Wir schreiben $y = Hx$.

Definition. (Linearität) Ein System ist linear, wenn $\forall x, x_1, x_2 \in X, \forall \alpha \in \mathbb{C}$

1. $H(\alpha x) = \alpha Hx$ (Homogenität)
2. $H(x_1 + x_2) = Hx_1 + Hx_2$ (Additivität)

Definition. (Nullraum) $\mathcal{N}(H)$ von einem linearen System $H : X \mapsto Y$ ist eine Teilmenge (d.h. ein linearer Unterraum) von X gegeben durch

$$\mathcal{N}(H) = \{x \in X : Hx = 0\}$$

Definition. (Bildraum) $\mathcal{R}(H)$ von einem linearen System $H : X \mapsto Y$ ist die Teilmenge von Y definiert durch

$$\mathcal{R}(H) = \{y = Hx : x \in X\}$$

Theorem. (Stetige Systeme) Das System H ist linear und stetig, dann und nur dann, wenn

$$H\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i H x_i$$

für jede konvergente Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$.

Das Inverse System

Definition. (Inverses System) Ein Inverse System $H : X \mapsto Y$ ist invertierbar, wenn es ein System $G : Y \mapsto X$ gibt, so dass:

$$GH = I_x$$

$$HG = I_y$$

wobei I_x und I_y die Identitätsabbildungen auf X bzw. Y ist. Dann bezeichnet man G als das zu H gehörige inverse System, man schreibt $H^{-1} = G$.

→ Wenn ein System **invertierbar** ist, dann ist seine Inverse **eindeutig** (Beweis S. 20 im Skript)

→ Die Inverse eines linearen Systems ist linear (Beweis S. 20 im Skript)

Darstellung linearer Systeme über Matrizen

Seien $B_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und $B_2 = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ Basen für zwei endlich dimensionale Räume X bzw. Y, so kann man ein Eingangssignal $x \in X$ und das zugehörige Ausgangssignal $y = Hx \in Y$ eindeutig darstellen als

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \quad \forall \alpha_i \in \mathbb{C}$$
$$y = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_n y_m \quad \forall \beta_i \in \mathbb{C}$$

Man kann das System H folgendermassen als Matrix darstellen:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \ldots & t_{mn} \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Wir sagen, dass die $m \times n$ Matrix $\mathbf{H}$ das System H in den Basen B_1 und B_2 darstellt.

Eigenschaften zeitkontinuierlicher linearer Systeme

1. **Zeitinvariantes System**:

   $HT_\tau x = T_\tau Hx \quad \forall x \in X, \tau \in \mathbb{R}$

   und mit $(T_\tau x)(t) = x(t - \tau)$

   $\rightarrow$ Wir nennen ein System zeitinvariant, wenn eine zeitliche Verschiebung am Eingang zu einer ebenso grossen zeitlichen Verschiebung am Ausgang führt.

2. **Kausales System**: $\forall x_1, x_2 \in X, \forall T \in \mathbb{R}$:

   $x_1(t) = x_2(t) \implies (Hx_1)(t) = (Hx_2)(t) \quad \forall t \leq T$

   $\rightarrow$ Alle physikalisch realisierbaren Systeme sind kausale Systeme, das bedeutet, dass der Ausgangswert eines Systems nur von den aktuellen und den vergangenen Eingangswerten abhängt, aber nicht von zukünftigen Eingangswerten. Anschaulich ausgedrückt erfolgt eine Wirkung frühestens zum Zeitpunkt der Ursache, aber nicht früher.

3. **Gedächtnisloses System**: Wenn $\forall x \in X$ und $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ das Ausgangssignal $(Hx)(t)$ zum Zeitpunkt t_0 nur von $x(t_0)$ abhängt, nennt man das System gedächtnislos.

   $\rightarrow$ Systeme **mit** Gedächtnis können vergangene Werte des Eingangssignals speichern.

4. **BIBO-Stabiles System**: Wenn $\forall x \in X$ mit $|x(t)| \leq B_x < \infty \quad \forall t$ ein $B_y \in \mathbb{R}$ mit $B_y < \infty$ existiert, so dass $|y(t)| \leq B_y \quad \forall t$, wobei $y = Hx$.

   $\rightarrow$ BIBO Stabil heisst nichts anderes, als dass jedes beschränkte Eingangssignal ein beschränktes Ausgangssignal hat.

LTI-Systeme

Ein LTI(=*linear time-invariant*) System H ist ein lineares, stetiges und zeitinvariantes System. Für eine Basis $B_1 = \{x_1, x_2, \dots\}$ für X gilt, dass die Antwort von H auf ein beliebiges Eingangssignal $x \in X$ vollständig durch $\{Hx_1, Hx_2, \dots\}$ charakterisiert ist.
Bisher haben wir für allgemeine Systeme H die Eingangs-Ausgangsbeziehung durch Angabe der Zuordnung $x \mapsto y$ über eine "Tabelle" angegeben. Doch für LTI Systeme gibt es eine einfachere Art diese Eingangs-Ausgangsbeziehung zu beschreiben:

Definition. (Impulsantwort):Ein LTI-System antwortet auf ein Eingangssignal $x(t)$ mit dem Ausgangssignal

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

wobei

$$h(t) = (H\delta)(t)$$

die *Impulsantwort* des Systems ist.

$\rightarrow$ Wir erkennen, dass das Ausgangssignal also durch eine Faltung gegeben ist: $y = x * h$

Eigenschaften

1. Wenn ein System in der Form $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$ dargestellt werden kann ist es ein LTI-System (Wichtig: Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht, also nicht jedes LTI-System lässt sich in der obigen Form darstellen)

2. Gedächtnislosigkeit: Jede Impulsantwort eines LTI-Systems ist gedächtnislos, da sie linear ist.

3. Kausalität: Ein LTI-System ist Kausal dann und nur dann, wenn

$$h(t) = 0 \quad \text{für} \quad \forall t < 0$$

$\rightarrow$ Herleitung auf Seite 32 im Skript.

4. BIBO-Stabilität: Ein LTI-System ist BIBO-Stabil wenn $h(t) \in L^1$ (L^1 = Raum der absolut integrierbaren Funktionen). In anderen Worten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$

Die Faltung

Definition. (p-Norm) Die p-Norm $||\cdot||_p$ ist definiert als

$$||x||_p = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p dt\Big)^{1/p}$$

$\rightarrow$ Die Faltung kann man sich als Überlagerung von gewichteten Echos des Eingangssignals vorstellen (die Gewichte sind dabei gegeben durch die Impulsantowrt am jeweiligen Punkt): $y(t) = \sum_j x(t-t_j)h(t_j)$

Eigenschaften

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und existierende Faltungsintegrale gilt

1. kommutativ: $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$
2. assoziativ: $(x_1 * x_2) * x_3 = x_1 * (x_2 * x_3)$
3. distributiv: $x_1 * (x_2 + x_3) = x_1 * x_2 + x_1 * x_3$
4. linear in beiden Argumenten:
   $x_1 * (\alpha x_2 + \beta x_3) = \alpha(x_1 * x_2) + \beta(x_1 * x_3)$
   $(\alpha x_2 + \beta x_3) * x_1 = \alpha(x_2 * x_1) + \beta(x_3 * x_1)$

An dieser Stelle findest du einen kleine Zusammenfassung von Kapitel 6, natürlich ist im Skript ist die Herleitung und Erklärung sehr viel ausführlicher! Dieses Kapitel ist **nicht** prüfungsrelevant und dient ausschliesslich dem Verständnis der Rechenregeln für das Delta Funktional.

Verallgemeinerte Funktionen

Wir beginnen mit der Herleitung des Begriffes Funktional, dazu betrachten wir das Beispiel einer Messung. Eine Messung kann nie unendlich genau sein weil sie eine gewisse Zeit benötigt, deshalb sind Messergebnisse immer ein Mittel des Wertes den man eigentlich messen will. Das kann man mathematisch ausdrücken und so schreiben:

$$\int_a^b x(t)\varphi(t)dt$$

Dabei beschreibt $\varphi(t)$ die Messvorrichtung welche folgende Eigenschaften erfüllen soll damit diese Sinnvoll ist:

- $\varphi(t) > 0 \quad \forall t$
- $\varphi(t) = 0 \quad \forall t \notin [a, b]$

- $\int_a^b \varphi(t)dt = 1 \qquad$ (Eichvorschrift)

Man kann jetzt mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz zeigen, dass

$$\int_a^b x(t)\varphi(t)dt = x(\xi)\int_a^b \varphi(t)dt = x(\xi) \quad a < \xi < b$$

Die obige Gleichungskette kann man auch auf den Bereich $(-\infty, \infty)$ erweitern und so verstehen, dass jedem $\varphi(t)$ ein reeller Wert (nämlich der Wert des Integrals) zugeordnet wird. Diesen Wert kann man jetzt auch symbolisch benennen:

$$\ell_x(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\varphi(t)dt$$

Wenn wir $\varphi(t)$ nochmals etwas anders definieren:

- $\varphi(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ stückweise stetig
- beliebig oft differenzierbar
- $\varphi(t) = 0 \quad \forall t \notin [a, b]$

nennen wir es **Testfunktion**, diese bilden dann sogar einen linearen Raum $\mathcal{D}$ der **Raum der Testfunktionen**.

→ Wir mussten die Definition nochmals leicht anpassen (ohne Eichvorschrift und Positivität), damit die $\varphi(t)$ einen linearen Raum bilden!

Zusammengefasst haben wir nun einen linearen Operator mit Eingangsraum $\mathcal{D}$ und Ausgangsraum $\mathbb{R}$. Jetzt können wir auch den Begriff Funktional definieren nämlich sind **Funktionale Operatoren auf einem Funktionenraum, deren Bildbereich die Skalare sind**.

Definition. (Verallgemeinerte Funktion) Jedes lineare Funktional auf dem Testfunktionenraum $\mathcal{D}$ heisst eine verallgemeinerte Funktion.

→ Die Rechenregeln findet ihr ab Seite 38 im Skript

Die Deltafunktion

Definition. (Deltafunktional und Deltafunktion) Das Deltafunktional wird definiert durch

$$\ell_\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\varphi(t)dt = \varphi(0)$$

Wir verwenden das Symbol $\delta(t)$ für die "Funktion", die dieses Funktional erzeugt (auch wenn diese als herkömmliche Funktion nicht existieren kann), und nennen es die Deltafunktion.

→ Die Deltafunktion ist eine Gerade Funktion d.h. $\delta(t) = \delta(-t)$

Rechenregeln

1. $\ell_x(\varphi) + \ell_\delta(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) + \delta(t))\varphi(t)dt$
2. $\delta(at+b) = \frac{1}{|a|}\delta(t + \frac{b}{a})$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\varphi(t)dt = \varphi(t_0)$ (Siebeigenschaft)
4. $(\delta * \varphi)(t) = \varphi(t)$
5. $\frac{d}{dt}\sigma(t) = \delta(t)$

Systeme im Frequenzbereich

Zuerst wollen wir die Fouriertransformation herleiten, dazu betrachten wir ein LTI-System mit dem Eingangssignal

$$x(t) = e^{2\pi i f_0 t}$$

Das heisst wir betrachten als Eingangssignal verschiedene Schwingungen. Wie immer rechnen wir dazu mal das Ausgangssignal aus:

$$\begin{aligned} y(t) = (x * h)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f_0 (t-\tau)} h(\tau)d\tau \\ &= e^{2\pi i f_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f_0 \tau} h(\tau)d\tau = x(t)\widehat{h}(f_0)x(t) \end{aligned}$$

Wir sehen, dass das LTI-System auf ein harmonisches Eingangssignal der Frequenz f_0 mit einem harmonischen Signal der gleichen Frequenz antwortet, aber zusätzlich noch mit der komplexen Amplitude $\widehat{h}(f_0)$. Wir können jetzt auch aus $\widehat{h}(f)$ wieder $h(t)$ gewinnen:

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f t}\hat{h}(f)df$$

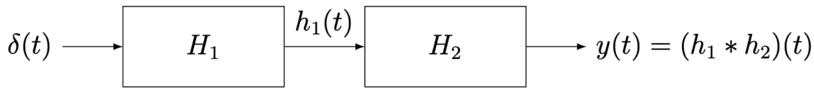
Die Funktionen $e^{2\pi i f t}$ sind Eigenfunktionen(=Eigenwerte auf dem Funktionenraum) des Systems H mit den zugehörigen Eigenwerten $\widehat{h}(f)$. Aus dieser Herleitung kann man nun eine sehr wichtige Eigenschaft zeigen:

Korollar. (Faltung)

$$\widehat{(x * h)}(f) = \widehat{x}(f)\widehat{h}(f)$$

Dieses Korollar ist extrem nützlich, da man so die Antwort eines Systems einfach durch eine Multiplikation im Frequenz Bereich berechnen kann und dann nur noch zurück transformieren muss. Ausserdem kann man so auch kaskadierende Systeme viel einfacher berechnen. Wenn wir zwei Systeme H_1, H_2 betrachtet die nacheinander angewendet werden und vom Gesamt System die Impulsantwort formulieren:

$$\widehat{h_{tot}(f)} = \widehat{h_1(f)}\widehat{h_2(f)}$$



Definition. (Die Fouriertransformation) Die Fouriertransformation vom Frquenzbereich in den Zeitbereich und andersrum wird so definiert:

$$\widehat{x}(f) = (\mathcal{F}x)(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ift}dt$$

$$x(t) = (\mathcal{F}^{-1}\widehat{x})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(f)e^{2\pi ift}df$$

$\rightarrow$ Die Fouriertransformation ist eine lineare Transformation kann also als einen linearen Operator $\mathcal{F}$ verstanden werden ($x(t)$ sind die Eingangssignale und $\widehat{x}(f) = (\mathcal{F}x)(f)$ die Ausgangssignale)

$\rightarrow$ Die Fouriertransformation $(\mathcal{F}x)(f)$ eines absolut integrierbaren Signals $x(t)$ ist stetig, und geht für $|f| \rightarrow \infty$ gegen Null (**Riemann-Lebesgue Lemma**)

Fouriertransformation Verallgemeinerter Funktionen

Wir erinnern uns an die Definition vom Testfunktionenraum $\mathcal{D}$ aus dem Kapitel über Verallgemeinerte Funktionen, dieser lineare Raum wird jetzt noch etwas erweitert, damit man die Fouriertransformation beschreiben kann. Der erweiterte Raum nennt man Testfunktionenraum $\mathcal{S}$ und hat die zusätzliche Eigenschaft:

- Alle Funktionen und deren Ableitungen müssen für $|u| \rightarrow \infty$ stärker als jede Potenz von $1/|u|$ gegen Null gehen.

Ein Beispiel solch einer Testfunktion wäre $\varphi(u) = e^{-\alpha u^2}$ für $\alpha > 0$. Die Notation $\ell_x(\varphi)$ bzw. $\ell(\varphi)$ bleibt erhalten

$$\ell_x(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\varphi(t)dt$$

Ein Funktional auf $\mathcal{S}$ wird als temperierte verallgemeinerte Funktion bezeichnet. Jetzt können wir mit Hilfe der Planscherelschen Identität die Fouerier-transformation definieren:

Definition. (Fouriertransformierte einer verallgemeinerten Funktion) Ist $\ell(\varphi)$ eine temperierte verallgemeinerte Funktion, so ist ihre Fouriertransformierte die temperierte verallgemeinerte Funktion

$$\mathcal{F}(\ell\varphi) = \ell(\mathcal{F}\varphi) \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

oder in Integralform

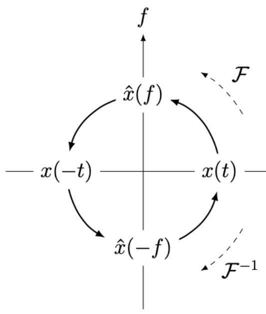
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\widehat{\varphi}(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(u)\varphi(u)du$$

Die Inverse Fouriertransformation ist analog definiert.

→ Einige Beispiele findet ihr im Skript ab Seite 56

Nützliche Eigenschaft der Fouriertransformation

Die Fouriertransformation kann man auch mehrmals anwenden, man sieht dass sie dann zurück auf das originale Signal führt einfach noch mit Minuszeichen. das folgende Diagramm verbildlicht dies sehr schön



Das kann nützlich sein, da man so die Fouriertabelle auf beide Seiten lesen kann.

Bandbegrenzte Signale

Definition. (Bandbreite) Die Bandbreite des Signals $x(t)$ ist der kleinste Wert W, für den gilt

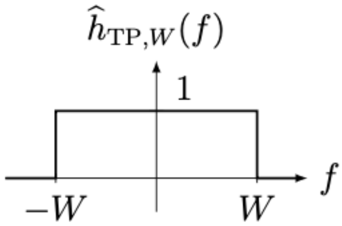
$$(x * h_{TP,W})(t) = x(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

wobei

$$h_{TP,W}(t) = \frac{sin(2\pi Wt)}{\pi t}$$

Wenn wir das ganze im Frequenzbereich formulieren wird die Definition etwas intuitiver:

$$\widehat{x}(f)\widehat{h}_{TP,W}(f) = \widehat{x}(f) \quad \forall f \in \mathbb{R}$$



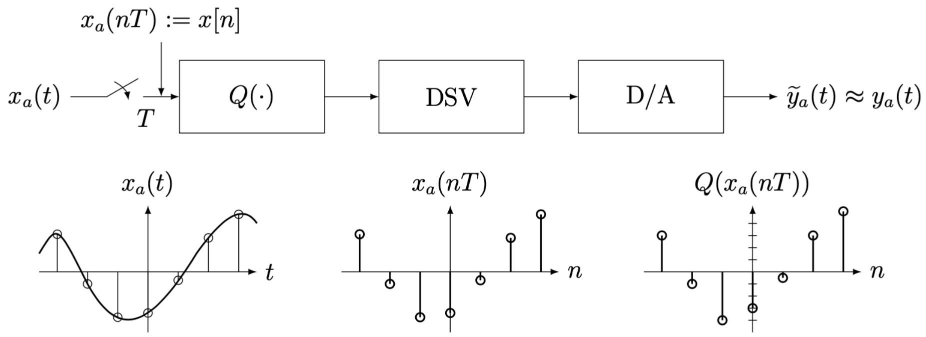
und

$$\widehat{h}_{TP,W}(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq W \\ 0 & sonst \end{cases}$$

$\rightarrow$ Intuitiv ist die Bandbreite eines Signals die Breite vom Spektrum des Singals (Abstand zwischen Punkten wo $\widehat{x}(\pm W) = 0$ ist)

Das Abtasttheorem

Wir haben uns bis jetzt schon sehr intensiv mit Signalen auseinandergesetzt, im nächsten Schritt wollen wir uns fragen, wie wir diese Signale in digitaler Form darstellen können, um damit auf dem Computer rechnen zu können. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns damit ein analoges Signal in ein digitales Signal überzuführen. Das heisst ja nichts anderes als von einem Zeitkontinuierlichen zu einem Zeitdiskreten Signal zu wechseln. Dabei ist natürlich die wichtigste Frage wie gut das digitale Signal dem analogen Signal entspricht. Wir würden das originale Signal am liebsten unverändert verarbeiten, aber durch die Quantisierung ergibt sich natürlich immer ein Fehler. Das Abtasttheorem gibt uns die Antwort darauf unter welchen Umständen der Fehler genügend klein ist, damit man aus dem digitalen Signal das analoge Signal wieder zurückgewinnen kann.

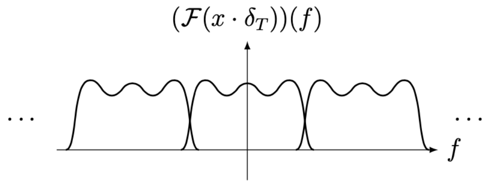


Theorem. (Das Abtasttheorem) Ein Signal mit der Bandbreite f_g kann aus seinen Abtastwerten, genommen mit einer Rate von $f_s \geq 2f_g$, eindeutig rekonstruiert werden.

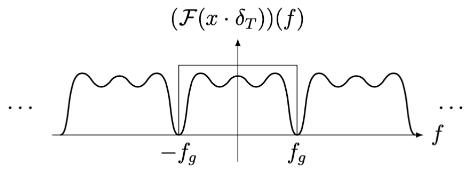
$\rightarrow$ Die kritische Rate $f_s = 2f_g$ wird als Nyquistrate bezeichnet
$\rightarrow$ Überabtastung mit $f_s > 2f_g$ garantiert, dass perfekte Rekonstruktion möglich ist

Wir unterscheiden dabei drei Arten abzutasten:

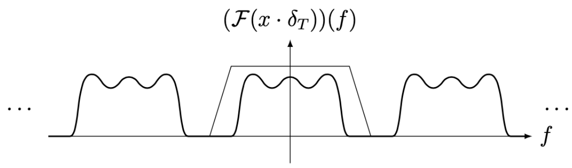
1. Unterabtastung $f_s < 2f_g$:



2. Kritische Abtastung $f_s = 2f_g$:



3. Überabtastung $f_s > 2f_g$:



Im Falle von Unterabtastung überlappen die Spektren von $x(t)$ und man kann dann $x(t)$ nicht mehr zurückgewinnen, das nennt man Aliasing. Im Zeitbereich kann man sich das so vorstellen:

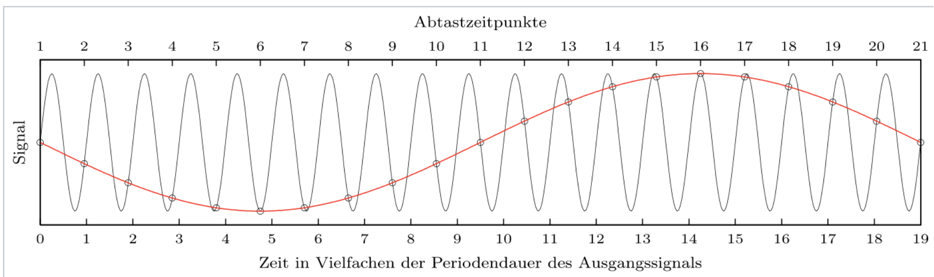


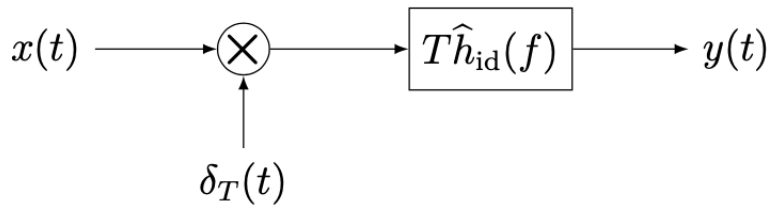
Abbildung 1: Verbildlichung des Alias-Effekts. Bild von: [1]

Man sieht auch im Zeitbereich, dass man das Signal nicht mehr eindeutig bestimmen kann.

Interpolationsformel

Mit Hilfe des Abtasttheorem kann man auch eine Interpolationsformel für $x(t)$ finden. Interpolation ist eine Art Abschätzung die genutzt werden kann um neue Datenpunkte aus bestehenden zu finden. Wir haben meistens eine Anzahlt gemessener Datenpunkte, zum Beispiel vom Abtasten eines Signals, und wollen eine Funktion finden die dazwischen passt. Wenn wir richtig abgetastet haben, wird diese Funktion dann unserer ursprünglichen entsprechen.

Also betrachten wir folgendes System und wollen zuerst einmal die Eingangs-Ausgangsbeziehung bestimmen.



$$
\begin{aligned}
y(t) &= \Big((x \cdot \delta_T) * (T \cdot h_{id})\Big)(t) \\
&= T\Big(\big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(\cdot - kT) * h_{id}\big)(t)\Big) \\
&= T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) h_{id}(t - kT)
\end{aligned}
$$

Wenn $\widehat{h_{id}}(f)$ eine Rechtecksfunktion ist und das Signal mit kritischer Rate abgetasted wird ergibt sich

$$h_{id}(t) = \frac{sin(2\pi f_g t)}{\pi t}$$

und

$$
\begin{aligned}
f_s = 2f_g \implies \frac{1}{T} &= 2f_g \\
\implies T &= \frac{1}{2f_g}
\end{aligned}
$$

Was dann zu folgendendem Ausgangssignal führt:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{sin(\frac{\pi}{T}(t - kT))}{\frac{\pi}{T}(t - kT)}$$

Weil wir ja wissen, dass das Abtasttheorem erfüllt ist gilt also auch $y(t) = x(t)$, das heisst wir haben für $x(t)$ eine Interpolationsformel gefunden

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \frac{sin(\frac{\pi}{T}(t-kT))}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}$$

Zeitdiskrete Signale und Systeme

Zeitdiskrete Signale

Wir haben im letzten Kapitel gesehen, dass die Abtastung eines Signals zu einer Periodische Fortsetzung des Spektrums führt. Das heisst das Spektrum besteht nicht mehr nur aus dem einen Bandbegrenzten $\widehat{x}(f)$ sondern auch aus Frequenz verschobenen Versionen $\widehat{x}(f - kf_s)$ wobei f_s die Abtastfrequenz ist. Im nächsten Schritt wollen wir eine Beziehung zwischen den Abtastwerten im Zeitbereich $x(kT)$ und dem periodischen Spektrum $\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(f - \frac{k}{T})$ herstellen (T ist die Abtastperiode). Wir stellen fest, dass wir eine Fouriertransformationsbeziehung finden können (herleitung im Skript auf Seite 74).

Definition. (Zeitdiskrete Fouriertransformation) Für eine Zahlenfolge $x_d[n]$ $(:= x(nT))$ und $\theta = Tf = \frac{f}{f_s}$ ist die Zeitdiskrete Fouriertransformation wie folgt definiert

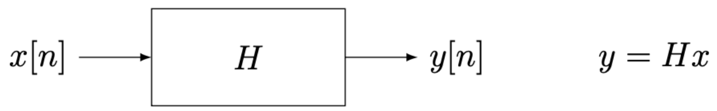
$$\widehat{x}(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-2\pi in\theta}$$

und die Rücktransfoarmation

$$x[n] = \int_0^1 \widehat{x}(\theta)e^{2\pi in\theta}d\theta$$

Zeitdiskrete Systeme

Jetzt widmen wir uns zeitdiskreten Systemen, das heisst nichts anderes als, dass das Eingangs- und Ausgangssignal zeitdiskret ist. Man schreibt dann $x[n]$ und $y[n]$ (wobei das n für ein diskretes t steht).



→Für zeitdiskrete Systeme gelten die gleichen Regeln für Linearität, Zeitinvarianz, Kausalität und BIBO Stabilität.

→Ein zeitdiskretes System heisst LTI falls es linear und zeitinvariant ist.

Definition. (Zeitdiskreter Deltaimpuls)

$$\delta[n] := \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition. (Zeitdiskrete Impulsantwort) Die zeitdiskrete Impulsantwort ist definiert als

$$h[n] = (H\delta)[n]$$

und beschreibt weiterhin die Eingangs-Ausgangsbeziehung eines zeitdiskreten LTI Systems

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

→ Ein zeitdiskretes LTI System ist kausal, dann und nur dann, wenn $h[n] = 0$ für $n < 0$

→ Wenn $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ ist das zeitdiskrete LTI System BIBO stabil.

Differenzengleichugnen

Allgemein sind Differenzengleichungen eine rekursive Berechnungsvorschrift für eine diskrete Folge von Werten. Eine wichtige Klasse von zeitdiskreten LTI-Systemen kann durch Differenzengleichungen der Form

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m]$$

beschrieben werden, wobei x das Eingangssignal und $y = Hx$ das Ausgangssignal des Systems bezeichnet. Was das heisst, ist nichts anderes, als dass man ein diskretes Ausgangssignal $y[n]$ an beliebiger Stelle durch eine Linearkombination von vergangenen $y[p]$ und $x[p]$ mit $p < n$ darstellen kann. Mathematisch ausgedrückt sieht das so aus:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} \tilde{a}_k y[n-k] + \sum_{m=0}^{M} \tilde{b}_m x[n-m]$$

Diese Relation können wir auch in einem Blockschaltbild darstellen(siehe Abb. 3), wobei die einzelnen Blöcke die Bedeutungen in Abb.2 haben.

Die Frage ist nun, was bringt uns diese Darstellung? Diese Darstellung ist sehr nützlich um den Frequenzgang $\widehat{h}(\theta)$ eines zeitdiskreten Systems zu finden, denn wir wissen ja, dass im Frequenzbereich folgendes gilt

$$\widehat{y}(\theta) = \widehat{h}(\theta)\widehat{x}(\theta) \Longleftrightarrow \widehat{h}(\theta) = \frac{\widehat{y}(\theta)}{\widehat{x}(\theta)}$$

und dass eine Zeitverschiebung eines Signales um N im Zeitbereich zu einer Multiplikation mit $e^{-2\pi i\theta N}$ im Frequenzbereich führt. Somit kann man also

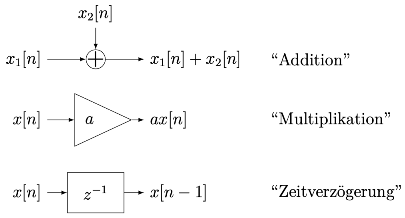


Abbildung 2: Bedeutungen der wichtigsten Blöcke in Blockschaltbildern

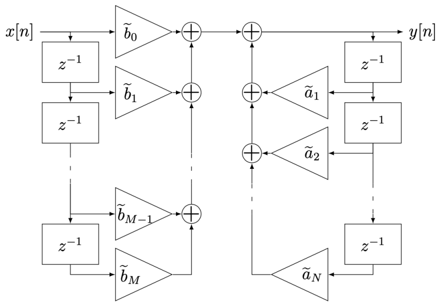


Abbildung 3: Graphische Darstellung der Differenzengleichung

die Differenzengleichung in den Frequenzbereich transformieren und sie dann in die Form $\frac{\widehat{y}(\theta)}{\widehat{x}(\theta)}$ bringen welche wiederum $\widehat{h}(\theta)$ entspricht. Man kann dann natürlich auch die Impulsantwort bestimmen, in dem man wieder zurück transformiert.

Allgemeines Vorgehen bei Aufgaben mit Differenzengleichungen

1. Schreibe die Differenzengleichung ausgehend vom Blockschaltbild auf
2. Bestimme die Fouriertransformation der Gleichung
3. Bringe die transformierte Gleichung in die Form $\frac{\widehat{y}(\theta)}{\widehat{x}(\theta)}$
4. Transformiere $\widehat{h}(\theta)$ zurück in den Zeitbereich mit Formel 73. um die Impulsantwort zu finden

$\rightarrow$ In der Prüfung kann es auch sein, dass sie euch ein $\widehat{h}(\theta)$ geben und die Impulsantwort suchen, dann müsst ihr meistens den Nenner faktorisieren und eine Partialbruchzerlegung machen.

Die diskrete Fouriertransformation (DFT)

Die DFT ist die Transformation zwischen **zeitdiskreten, endlichen** Signalen, welche periodisch fortgesetzt wurden, und **diskreten, periodischen** Frequenzspektren. Der Unterschied zur Fouriertransformation zeitdiskreter Signale (DTFT) im vorherigen Kapitel ist, dass diese von **zeitdiskreten, unendlichen** Signalen auf **kontinuierliche, periodischen** Frequenzspektren abbildet. Die beiden Transformationen sind eng verwandt und im Skript sehen wir wie man aus der DTFT die DFT herleiten kann: Man nimmt an, dass die Signale, die man betrachtet endliche länge haben, dann kann man das Spektrum der DTFT von einer unendlichen summation auf eine endliche Periode verkürzen und erhält daraus die DFT Beziehung. In anderen Worten: Wenn man das Spektrum der DTFT während einer Periode so abtastet, dass man N Abtastwerte erhält entspricht das der DFT. Die DFT hat im Gegensatz zur DTFT sehr viele Praktische Anwendungen, zum Beispiel zur Bestimmung...

1. der in einem abgetasteten Signal hauptsächlich vorkommenden Frequenzen
2. der Amplituden und der zugehörigen Phasenlage zu diesen Frequenzen
3. zur Implementierung digitaler Filter mit großen Filterlängen.

Definition. (Die DFT) Die diskrete Fouriertransformation (DFT) eines zeitdiskreten, endlichen Signals ist definiert als

$$\widehat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i k n/N}$$

die Rücktransformation als

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{x}[k] e^{2\pi i k n/N}$$

Man kann die Transformation auch als DFT-Matrix $\mathbf{F}_N$ darstellen, wobei $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{x}[0] \\ \widehat{x}[1] \\ \vdots \\ \widehat{x}[N-1] \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_N} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}.$$

Die Matrix kann verkürzt auch so geschrieben werden

$$[\mathbf{F}_N]_{k,n} = \omega_N^{kn} \quad k, n = 0, 1, \ldots, N-1$$

Wichtige Erkenntnisse

- Da die Signale und ihre Spektren periodisch sind gilt: $x[n+N] = x[n]$ und $\widehat{x}[k+N] = \widehat{x}[k]$ für alle $n, k \in \mathbb{Z}$
- $\mathbf{F}_N$ ist bis auf einen Skalierungsfaktor unitär: $\mathbf{F}_N \mathbf{F}_N^H = N\mathbf{I}_N$
- Man kann auch zeigen, dass die DFT eine Entwicklung des Vektors $\mathbf{x}$ in einer orthonormale Basis für $\mathbb{C}^N$ ist (ab Seite 86 im Skript)

Die zyklische Faltung

Wir haben schon gesehen, dass der Fourierraum sehr nützlich ist um Faltungen zu berechnen, weil eine Faltung im Fouerierraum einem Produkt entspricht. Wenn wir im Spektrum aus einem Produkt versuchen die normale Faltung herzuleiten (siehe Seite 88 im Skript) sehen wir, dass wir nicht die gewohnte (lineare) Faltung erhalten. Diese neue Operation nennt man zyklische Faltung und kommt davon, dass die Spektren der DFT N-periodisch sind. Das Resultat der Zyklischen Faltung ist auch wieder N-periodisch, dass heisst die Summen sind auch nicht mehr unendlich sondern von 0 bis N-1!

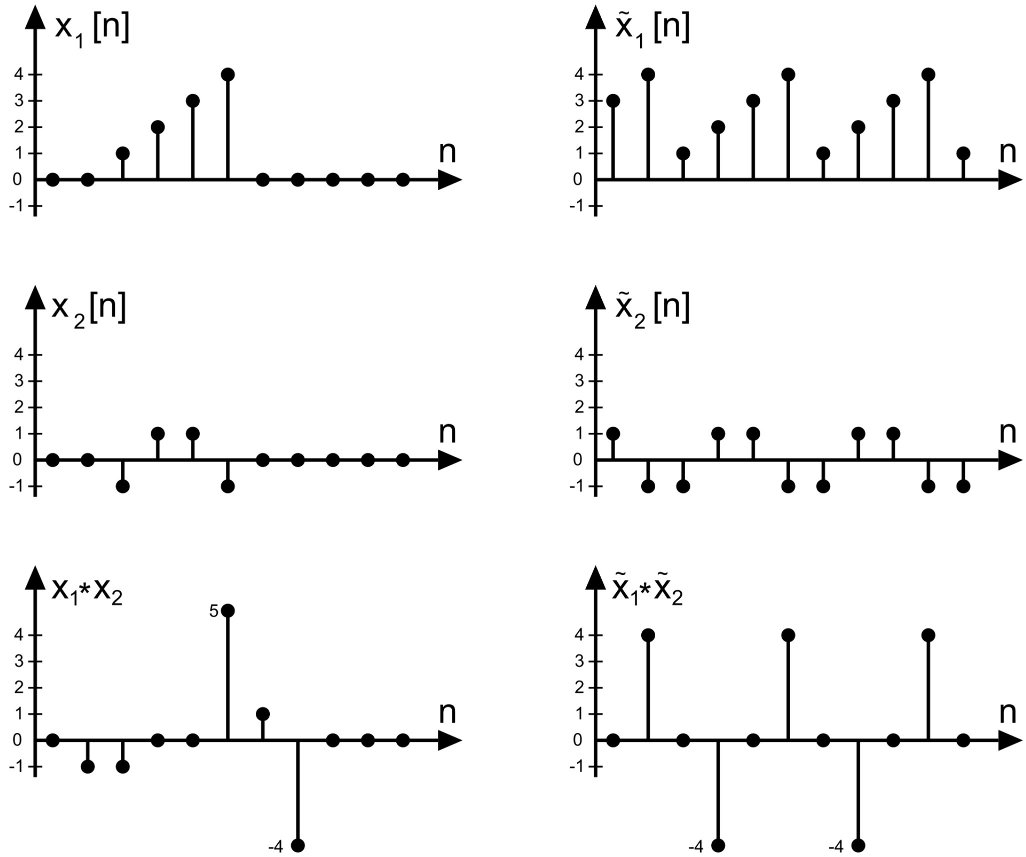


Abbildung 4: Vergleich zwischen der herkömmlichen Faltung (links) und der Zyklischen Faltung(rechts). Bild von: [2]

Definition. (Zyklische Faltung) Für zwei N-periodische, diskrete Signale $x_1[n], x_2[n]$ ist die zyklische Faltung definiert als

$$y[\ell] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n]x_2[\ell - n] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[\ell - n]x_2[n]$$

wobei y[n] auch wieder N-periodisch und diskret ist!

Die Zyklische Faltung lässt sich sehr schön als Matrix schreiben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_3[0] \\ x_3[1] \\ \vdots \\ x_3[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_3} = \begin{bmatrix} x_2[0] & x_2[-1] & \cdots & x_2[-N+1] \\ x_2[1] & x_2[0] & \cdots & x_2[-N+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2[N-1] & x_2[N-2] & \cdots & x_2[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[0] \\ x_1[1] \\ \vdots \\ x_1[N-1] \end{bmatrix}$$

Hier soll bemerkt werden, dass die $\mathbf{X}_2$ Matrix zirkulant ist d.h. man kann die Spalten/Reihen zyklisch "durch schieben", um die nächste Spalte/Reihe zu erhalten. Des Weiteren entsprechen Terme wie $-N + 1 = 1$ wegen der Periodizität. Wegen dieser Eigenschaften von $\mathbf{X}_2$ kann man auch eine Eigenwertzerlegung mithilfe der DFT finden (Seite 91 im Skript). Dann sind die Spalten der normalisierten DFT Matrix $N^{-1/2}\mathbf{F}_N^H$ die Eigenvektoren und die Eigenwerte sind gegeben durch die DFT der ersten Spalte von $\mathbf{X}_2$.

$$\mathbf{X}_2 = \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H \begin{bmatrix} \widehat{x}_2[0] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \widehat{x}_2[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{F}_N.$$

Dies kann man natürlich auch auf die Impulsantwort übertragen und ein System folgendermassen beschreiben

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{F}_N^H \begin{bmatrix} \widehat{h}[0] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \widehat{h}[N-1] \end{bmatrix} \mathbf{F}_N\mathbf{x}$$

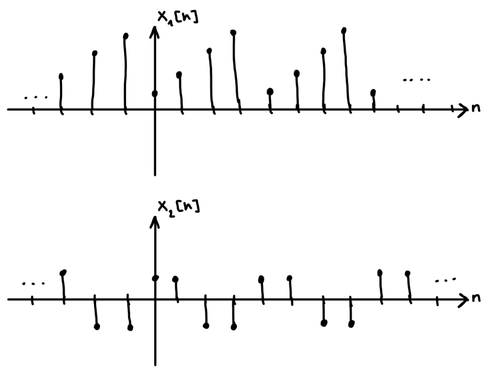
Wenn wir das Spektrum des Ausgangssignals wissen wollen sieht dass dann so aus

$$\mathbf{F}_N \mathbf{y} = \underbrace{\frac{1}{N}\mathbf{F}_N \mathbf{F}_N^H}_{\mathbf{I}_N} \begin{bmatrix} \widehat{h}_2[0] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \widehat{h}_2[N-1] \end{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \widehat{h}[0]\widehat{x}[0] \\ \widehat{h}[1]\widehat{x}[1] \\ \vdots \\ \widehat{h}[N-1]\widehat{x}[N-1] \end{bmatrix}.$$

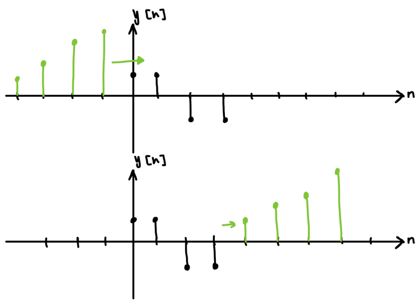
Der Vorteil der zyklischen Faltung ist, dass man sie mit einem Algorithmus(FFT) sehr schnell berechnen kann, jedoch will man in der Anwendung häufig zwei Signale normalFalten, deshalb müssen wir einen Weg finden, um das mit der zyklischen Faltung hinzukriegen.

Die lineare Faltung

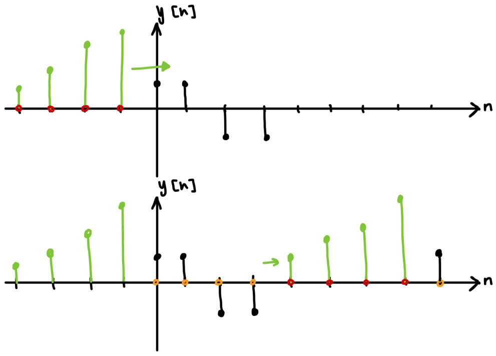
Die lineare Faltung ist die gewöhnliche Faltung mit der wir bisher immer gerechnet haben.Um im diskreten weiterhin Gebrauch machen zu können von der linearen Faltung müssen wir sie aus der zyklischen konstruieren. Das Problem das man beheben muss ist gut ersichtlich in Abb.4, man sieht, dass wenn die Signale $\tilde{x}_1[n]$ und $\tilde{x}_2[n]$ periodisch sind, man aber eine lineare Faltung haben will, die Periodischen Kopien in den Weg geraten. Dies werde ich noch etwas genauer erläutern an einem Beispiel. Betrachten wir zwei Signale $x_1[n]$ und $x_2[n]$:



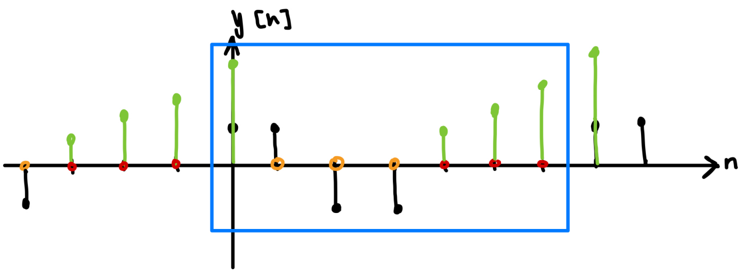
Wenn die Signale nicht periodisch wären würde die lineare (graphische) Faltung so aussehen:



Wenn wir uns nun überlegen, wo die Periodischen Signale Null sein müssen (Zero Padding) damit man das gleiche Bild wie für die lineare Faltung erhält, bekommt man für das Signal $x_2[n]$ die Roten Punkte und für das Signal $x_1[n]$ die Orangen:



Man kann nun ablesen, dass die 4-periodischen Signale $x_1[n]$ und $x_2[n]$ auf 7-Periodische Signale erweitert werden müssen. Man darf nicht vergessen, dass man immer noch die Zyklische Faltung braucht, um diese lineare Faltung zu berechnen, dass heisst wir Summieren nur über den Periodenbereich $[0, 6]$, was dem Blauen Rahmen entspricht:



Ihr findet eine allgemeinere Herleitung und Anleitung hierzu auf S.90.

Wie auch schon im kontinuierlichen Fall kann man auch im diskreten verschieden abtasten, nämlich überabtasten,kritisch abtasten und unterabtasten. Wir wollen vor allem die zwei Grenzfälle betrachten, um zu sehen, ob man das Signal wieder zurückgewinnen kann.

Überabtastung

Im Fall von Überabtastung haben wir eigentlich zu viele Werte abgetastet d.h. zum Beispiel haben wir M $\widehat{x}[k]$ Werte und wollen die zugehörigen N $x[n]$ Werte finden, wobei natürlich in diesem Fall $M > N$. Betrachten wir das in Matrix Schreibweise:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{x}(1/M) \\ \vdots \\ \hat{x}((M-1)/M) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_M & \omega_M^2 & \cdots & \omega_M^{N-1} \\ 1 & \omega_M^2 & \omega_M^4 & \cdots & \omega_M^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_M^{M-1} & \omega_M^{2(M-1)} & \cdots & \omega_M^{(N-1)(M-1)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_o \in \mathbb{C}^{M \times N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

Das Problem, dass wir lösen wollen ist eigentlich nur, ob wir eine Inverse finden können für ein über-bestimmtes Gleichungssystem. Die Antwort darauf ist ja, denn die Spalten der Matrix sind orthogonal, weil wir eine DFT Matrix betrachten und es gibt unendlich viele Inversen. Eine solche Inverse ist die Moore-Penrose Pseudo-Inverse (die Inverse wird Pseudo-Inverse genannt, weil Inversen per Definition immer quadratisch sein müssen)

$$\mathbf{F}_o^{\#} = (\mathbf{F}_o^H \mathbf{F}_o)^{-1} \mathbf{F}_o^H$$

Mithilfe dieser Inversen kann man die $x[n]$ Werte wieder zurückgewinnen.

Unterabtastung

Im Fall von Unterabtastung haben wir zu wenige Werte abgetastet und das ursprüngliche Signal $x[n]$ kann nicht mehr eindeutig zurückgewonnen werden. In Matrix Schreibweise sieht das so aus:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}(0) \\ \hat{x}(1/M) \\ \vdots \\ \hat{x}((M-1)/M) \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_M & \omega_M^2 & \cdots & \omega_M^{N-1} \\ 1 & \omega_M^2 & \omega_M^4 & \cdots & \omega_M^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_M^{M-1} & \omega_M^{2(M-1)} & \cdots & \omega_M^{(N-1)(M-1)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_u \in \mathbb{C}^{M \times N}} \underbrace{\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}$$

Dies entspricht dem Problem ein Gleichungssystem mit zu wenigen Gleichungen und zu vielen Unbekannten zu haben d.h. $M < N$

Die FFT

Die "Fast Fourier Transform" (FFT oder schnelle Fouriertransformation) ist ein Algorithmus zur Berechnung der DFT mit einer möglichst geringen Laufzeit. Die Laufzeit ist meistens proportional zur Anzahl arithmetischen Operationen, das Ziel der FFT, ist es also diese Anzahl möglichst klein zu halten.

Definition. (Komplexität) Die Komplexität eines Algorithmus ist die Anzahl komplexer Additionen plus die Anzahl komplexer Multiplikationen.

Definition. (Gross $\mathcal{O}$ Notation) Für zwei reellwertige Funktionen f und g bedeutet $f \in \mathcal{O}(g)$, dass f durch g asymptotisch von oben beschränkt ist.

Theorem. (FFT-Algorithmus von Cooley und Tukey, 1956)
Für $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$ gegeben, mit $N = 2^n$, $n \in N$, ist es möglich $\widehat{x}[k]$,$k = 0, 1, \dots, N-1$, mit einer Komplexität von höchstens $4Nlog_2(N) = \mathcal{O}(Nlog_2(N))$ zu berechnen.

$\rightarrow$ Für den Beweis schaue im Skript auf Seite 99 nach.
$\rightarrow$ Der Algorithmus funktioniert nur, wenn man Signale der Länge $N = 2^n$ hat, wenn das Signal kürzer ist, füllt man es einfach mit Nullen auf bis es eine Potenz von 2 ist (das wird immer noch schneller sein, als die DFT-Matrix direkt zu multiplizieren)

Der FFT Algorithmus von Cooley und Tukey nutzt die Eigenschaft

$$\omega_N^2 = e^{2\pi i 2/N} = e^{2\pi i/(N/2)} = \omega_{N/2}$$

und kann so die DFTs der Länge N auf DFTs der Länge N/2 herunterbrechen, dieses Verfahren kann man dann $log_2(2^n) - 1$ mal anwenden bis die DFTs nur noch Länge 2 haben. Also ist dieser FFT Algorithmus ein Rekurisiver Algorithmus. Ich kann euch dieses Video (10min) empfehlen, ich finde die Erklärung dort sehr anschaulich.

Literatur

[1] the free encyclopedia Wikipedia. *Alias-Effekt*. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Alias-Effekt. (accessed: 13.12.2020).

[2] the free encyclopedia Wikipedia. *Zyklische Faltung*. URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Zyklische_Faltung. (accessed: 04.12.2020).